

ANALISIS EKSPERIMENTAL GETARAN BANTALAN BOLA DENGAN MENGGUNAKAN FRF ORDE TINGGI

Trihono Sewoyo*, Komang Bagiasna**, Zainal Abidin**

*Teknik mesin-Univ. Muhammadiyah Malang

**Lab.Dinamika PPAU-IR ITB

e-mail : trihono@usa.net

Ringkasan

Penelitian ini didasarkan pada metoda yang dikembangkan oleh Storer, Lee dan Tomlinson [1,2,3]. Storer[1] mengembangkan metoda penentuan parameter dinamik sistem nonlinear dengan melakukan suaian kurva fungsi transfer orde tinggi yang diperoleh dengan mengukur stimulus dan respons dalam domain frekuensi. Sedangkan Lee [2] menentukan parameter model ruang yang berupa massa, kekakuan pegas dan konstanta redaman berdasarkan FRF orde tinggi yang diperoleh dari pengukuran amplitudo gaya eksitasi dan respons kompleks dalam domain frekuensi. Dalam penelitian ini akan dibandingkan kedua metoda ini dengan melakukan eksperimen pada bantalan bola yang dari berbagai penelitian menunjukkan perilaku sistem nonlinear [4,5]. Hasil-hasil yang diperoleh menunjukkan, adanya perbedaan yang cukup berarti antara fungsi transfer dan FRF orde tinggi. Disamping itu besar amplitudo eksitasi sangat berpengaruh terhadap Fungsi Transfer orde tinggi dan dengan demikian berpengaruh pula terhadap parameter getaran yang diperoleh dari fungsi transfer ini.

Abstract

This work is based on method developed by Storer, Lee and Tomlinson [1,2,3]. Storer[1] determined parameter of nonlinear system by curve fitting of higher order FRF that was obtained by measuring stimulus and response of nonlinear system in the frequency domain. While Lee[2] determined spatial model parameter i.e mass, stiffness and damping constant based on higher order FRF that was obtained from measurement of excitation force amplitude in time domain and complex response in frequency domain. In this paper the two methods will be compared by conducting experiment on the ball bearing which shows nonlinear behavior [4,5]. The result shows the two methods have a significant difference. While the amplitude of excitation force affect the higher order Transfer Function and also the dynamical parameter of the system.

Keywords : Volterra Series, Higher order FRF, Total FRF, Transfer Function, Curve Fitting, SVD

1. PENDAHULUAN

Penggunaan deret Volterra [6] untuk analisis eksperimental getaran sistem-sistem nonlinear masih sangat terbatas. Salah satunya adalah penelitian yang dilakukan oleh Storer dan Tomlinson [1]. Pada penelitian ini deret Volterra digunakan untuk menganalisis getaran batang jepit-jepit yang diberi beban mula. Fungsi transfer (selanjutnya dipakai istilah FRF total) orde tinggi diperoleh dengan mengukur respons dan stimulus dalam domain frekuensi. Pengertian FRF total dan FRF dipertukarkan untuk amplitudo stimulus yang cukup kecil sehingga perbedaan antara keduanya dapat diabaikan. Hasil yang diperoleh menunjukkan batang jepit-jepit mempunyai kekakuan kuadratik. Hal ini terlihat dari FRF total orde pertama dan kedua mempunyai bentuk yang jelas. Sedangkan FRF total orde ketiga mempunyai

bentuk yang tidak jelas. Dari FRF total order tinggi ini dilakukan suaian kurva untuk menentukan parameter getaran nonlinear. Lee [2] melakukan analisis teoritik dengan pendekatan yang berbeda. Dalam hal ini FRF orde tinggi diperoleh dari perhitungan. Penentuan amplitudo gaya eksitasi dalam domain waktu dan respons dalam domain frekuensi diperoleh dari hasil simulasi. Dalam hal ini metoda SVD (*Singular Value Decomposition*) digunakan untuk menentukan parameter getaran nonlinear. Makalah yang ditulis oleh Lee ini tidak mencakup kajian eksperimental.

Dengan menggunakan kedua metoda di atas, penelitian dimaksudkan untuk mengetahui parameter dinamik nonlinear bantalan bola sekaligus mengetahui *state of the arts* penelitian getaran nonlinear secara eksperimental berbasis deret Volterra.

2. FRF TOTAL DAN FRF

FRF total orde pertama dan orde tinggi ditentukan melalui hubungan berikut [7]

$$\tilde{H}_1(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \quad (1a)$$

$$\tilde{H}_2(j\omega) = \frac{2Y(j2\omega)}{X(j\omega)^2} \quad (1b)$$

$$\tilde{H}_3(j\omega) = \frac{4Y(j3\omega)}{X(j\omega)^3} \quad (1c)$$

$$\tilde{H}_n(j\omega) = \frac{2^{n-1} Y(jn\omega)}{X(j\omega)^n} \quad (1d)$$

$Y(j\omega)$ merupakan respons fundamental pada frekuensi input ω . Sedangkan $Y(j2\omega)$, $Y(j3\omega)$, ..., $Y(jn\omega)$ adalah bentuk harmonik dari spektrum frekuensi sinyal respons. Dalam pengujian, digunakan input sinyal sinus dengan variasi frekuensi dan mengukur input dan respons (berserta harmoniknya) dalam domain frekuensi. Besaran-besaran ini merupakan besaran kompleks. Perlu ditekankan di sini bahwa pendekatan ini merupakan pendekatan satu dimensi.

Definisi FRF orde tinggi didasarkan pada deret Volterra [6]. Deret Volterra merupakan perluasan konsep integral konvolusi yang berlaku untuk sistem nonlinear.

Untuk sistem linear hubungan input $x(t)$ dengan output $y(t)$ adalah

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) \cdot d\tau \quad (2)$$

Untuk sistem nonlinear yang memenuhi persyaratan tertentu, hubungan input-output dinyatakan oleh deret Volterra

$$\begin{aligned} y(t) = & \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau_1) \cdot x(t - \tau_1) \cdot d\tau_1 \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) \cdot x(t - \tau_1) \cdot x(t - \tau_2) \cdot d\tau_1 d\tau_2 \\ & + \dots + \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \cdot \prod_{i=1}^n x(t - \tau_i) \cdot d\tau_1 \dots d\tau_n + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Suku pertama deret mempunyai bentuk yang sama dengan integral konvolusi pada sistem linear dan oleh karena itu FRF orde pertama dinyatakan dengan Transformasi Fourier satu dimensi

$$H_1(j\omega_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau_1) \cdot e^{-j\omega_1 \tau_1} \cdot d\tau_1 \quad (4)$$

FRF orde tinggi dapat didefinisikan dengan memperluas pendekatan ini dan dengan menggunakan Transformasi Fourier multi dimensi

$$H_n(j\omega_1, \dots, j\omega_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \cdot e^{-j(\omega_1 \tau_1 + \dots + \omega_n \tau_n)} \cdot d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (5)$$

Dalam praktek jika input berupa sinyal sinus, FRF total $\tilde{H}_n(j\omega)$ akan berbeda dengan FRF $H_n(j\omega, \dots, j\omega)$ akibat timbulnya efek *degenerative* pada setiap pengukuran $\tilde{H}_n(j\omega)$ [7]. Hubungan FRF total orde pertama $\tilde{H}_1(j\omega)$ yang terukur dengan FRF orde pertama $H_1(j\omega)$ adalah

$$\tilde{H}_1(j\omega) = H_1(j\omega) + H_3(j\omega, j\omega, -j\omega) 2.3 \left(\frac{X}{2}\right)^2 + \dots + H_n(j\omega, j\omega, \dots, -j\omega) 2.n \left(\frac{X}{2}\right)^{n-1} \quad (6)$$

Persamaan di atas melibatkan bentuk *degenerative* dari semua FRF orde ganjil (n adalah bilangan ganjil).

Untuk memperoleh FRF orde tinggi H_n ini, Lee [2] telah melakukan simulasi numerik berdasarkan persamaan yang diturunkan dari Deret Volterra dan Transformasi Fourier multi dimensi.

Jika suatu sistem nonlinear dieksitasi dengan gelombang sinusoidal, respons pada frekuensi eksitasi $Y(\omega)$ adalah

$$Y(\omega) = XH_1(\omega) + \frac{3}{4} X^3 H_3(\omega, \omega, -\omega) + \frac{5}{8} X^5 H_5(\omega, \omega, \omega, -\omega, -\omega) + \dots \quad (7)$$

Persamaan di atas menunjukkan bahwa $Y(\omega)$ merupakan fungsi dari amplitudo eksitasi X . Oleh karena itu, jika $Y(\omega)$ diukur dengan mengubah-ubah amplitudo eksitasi dan mengabaikan suku orde tinggi, akan dapat diperkirakan nilai FRF orde tinggi. Sebagai misal, jika diukur $Y_1(\omega)$, $Y_2(\omega)$, $Y_3(\omega)$ untuk tiga amplitudo eksitasi yang berbeda X_1 , X_2 , X_3 dan menggunakan tiga suku yang pertama pada persamaan (7), akan diperoleh persamaan berikut,

$$\begin{bmatrix} Y_1(\omega) \\ Y_2(\omega) \\ Y_3(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & \frac{3}{4} X_1^3 & \frac{5}{8} X_1^5 \\ X_2 & \frac{3}{4} X_2^3 & \frac{5}{8} X_2^5 \\ X_3 & \frac{3}{4} X_3^3 & \frac{5}{8} X_3^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1(\omega) \\ H_3(\omega, \omega, -\omega) \\ H_5(\omega, \omega, \omega, -\omega, -\omega) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Dari persamaan (8) ini akan diperoleh FRF $H_1(\omega)$, $H_3(\omega, \omega, -\omega)$, $H_5(\omega, \omega, \omega, -\omega, -\omega)$. Untuk memperoleh $H_2(\omega, \omega)$ digunakan persamaan,

$$\begin{bmatrix} Y_1(2\omega) \\ Y_2(2\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}X_1^2 & \frac{1}{2}X_1^4 \\ \frac{1}{2}X_2^2 & \frac{1}{2}X_2^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_2(\omega, \omega) \\ H_4(\omega, \omega, \omega, -\omega) \end{bmatrix} \quad (9)$$

Untuk menentukan parameter model ruang (*spatial model*) dari FRF hasil perhitungan dalam persamaan (8) di atas yang dalam hal ini berupa massa modal, kekakuan modal, dan redaman modal, digunakan persamaan (11) dan (12). Kedua persamaan tersebut diperoleh dari persamaan differensial getaran SDOF dengan kekakuan kubik yang dieksitasi dengan menggunakan sinyal sinusoidal.

$$m\ddot{y}(t) + c_1\dot{y}(t) + k_1y(t) + k_2y(t)^2 + k_3y(t)^3 = \frac{X}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \quad (10)$$

dengan menggunakan metoda HPM (*Harmonic Probing Method*) [2] diperoleh,

$$\begin{bmatrix} -\omega_1^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_1 \\ -\omega_2^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ k_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Re}[H_1(\omega_1)^{-1}] \\ \text{Im}[H_1(\omega_1)^{-1}] \\ \text{Re}[H_1(\omega_2)^{-1}] \\ \text{Im}[H_1(\omega_2)^{-1}] \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (11)$$

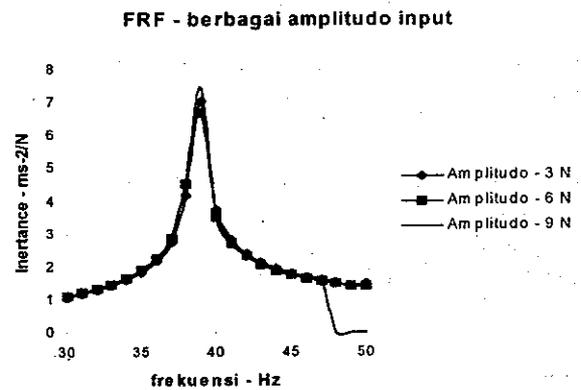
$$\begin{bmatrix} \text{Re}[H_1(2\omega_1)] & 1 \\ \text{Im}[H_1(2\omega_1)] & 0 \\ \text{Re}[H_1(2\omega_2)] & 1 \\ \text{Im}[H_1(2\omega_2)] & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3}k_2^2 \\ \frac{4k_2^2}{3k_1} - k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Re} \left[\frac{H_3(\omega_1, \omega_1, -\omega_1)}{H_1(\omega_1)^3 H_1(-\omega_1)} \right] \\ \text{Im} \left[\frac{H_3(\omega_1, \omega_1, -\omega_1)}{H_1(\omega_1)^3 H_1(-\omega_1)} \right] \\ \text{Re} \left[\frac{H_3(\omega_2, \omega_2, -\omega_2)}{H_1(\omega_2)^3 H_1(-\omega_2)} \right] \\ \text{Im} \left[\frac{H_3(\omega_2, \omega_2, -\omega_2)}{H_1(\omega_2)^3 H_1(-\omega_2)} \right] \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (12)$$

Dari persamaan (11) dan (12) terlihat bahwa persamaan yang ada melebihi parameter yang dicari. Untuk menyelesaikan kasus ini digunakan metoda SVD (*Singular Value Decomposition*).

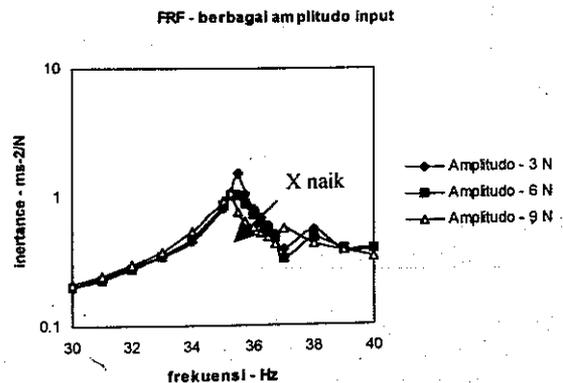
3. SISTEM LINEAR DAN NONLINEAR

Banyak cara untuk mendeteksi nonlinearitas struktur [8]. Dari berbagai cara itu ada 2 cara sederhana yang dapat dilakukan untuk perkiraan awal struktur bersifat linear atau tidak.[9, 10]. Cara pertama struktur diberi eksitasi sinyal sinus dan responsnya diukur. Untuk sistem linear respons ini akan berupa sinyal sinus dengan frekuensi yang sama dengan frekuensi eksitasi. Sedang untuk sistem nonlinear respons terukur akan berupa sinyal periodik. Cara kedua adalah dengan mengukur FRF sistem tersebut untuk berbagai amplitudo gaya eksitasi. Untuk sistem linear, perubahan amplitudo eksitasi tidak akan menggeser puncak kurva FRF. Ini berarti frekuensi pribadi sistem tidak berubah. Sedangkan untuk sistem nonlinear, perubahan amplitudo akan menggeser puncak kurva.

Pada penelitian ini, cara kedua diterapkan pada dua sistem yang berbeda. Sistem pertama adalah batang kontinyu (baja) yang ditumpu engsel dan rol. Sistem yang kedua adalah batang kontinyu (aluminium) yang ditumpu jepit-jepit dan diberi defleksi awal yang cukup besar dengan menggunakan pegas. FRF yang diperoleh dapat dilihat pada Gambar 1 berikut ini.



Gambar 1a. FRF batang ditumpu engsel – rol dengan amplitudo eksitasi yang berbeda



Gambar 1b. FRF batang ditumpu jepit – jepit dengan amplitudo eksitasi yang berbeda

Untuk memperjelas pengaruh amplitudo terhadap frekuensi pribadi dibuat Tabel (1) di bawah ini,

Tabel 1. Perubahan ω_n terhadap amplitudo

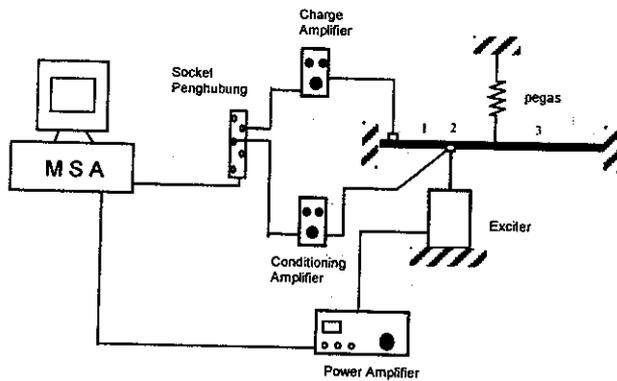
Amplitudo (N)	engsel - rol (ω_n)	jepit - jepit (ω_n)
3	39	35.5
6	39	35.25
9	39	35

Batang jepit-jepit mempunyai frekuensi pribadi yang lebih rendah. Hal ini disebabkan oleh material batang yang berupa aluminium paduan dan dimensi yang lebih tipis dan lebih panjang.

Dari Gambar 1 dan Tabel (1) di atas terlihat bahwa batang engsel-rol merupakan sistem linear (diindikasikan oleh tidak berubahnya frekuensi pribadi) dan batang jepit-jepit merupakan sistem nonlinear (frekuensi pribadi berubah dengan berubahnya amplitudo).

4. BATANG JEPIT-JEPIT

Dari sub bab sebelumnya diketahui batang jepit-jepit merupakan struktur yang bersifat nonlinear. Selanjutnya pengukuran dilakukan untuk memperoleh FRF total orde pertama sampai ketiga. Hal ini dilakukan untuk validasi hasil-hasil yang diperoleh Storer [1] sekaligus untuk memeriksa kebenaran prosedur pengukuran. Material batang adalah Aluminium paduan. Kondisi pengukuran dapat dilihat pada Gambar 2 berikut ini.



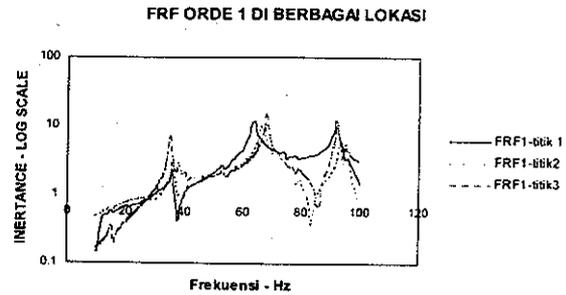
Gambar 2. Set-up pengukuran batang jepit-jepit yang diberi beban mula

Pengukuran respons dilakukan pada tiga titik yang berbeda. Hal ini dimaksudkan untuk melihat distribusi sifat nonlinearitas sepanjang batang. Pegas dipasang untuk memberikan beban awal. Dalam hal ini defleksi di lokasi pegas adalah 3.5 cm. Sedangkan gaya eksitasi diberikan melalui exciter yang dipasang pada titik 2.

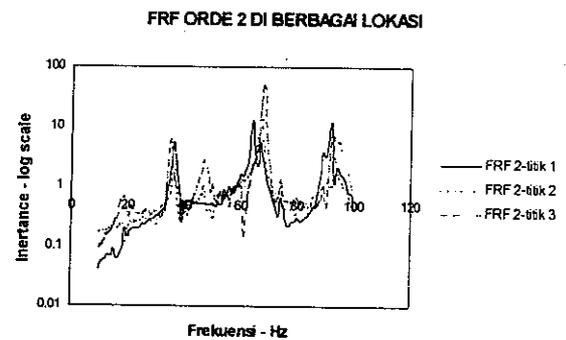
Angka-angka pada Gambar 2 menyatakan lokasi sensor percepatan (*Accelerometer*).

Pengambilan data dilakukan titik per titik secara manual. Ini berarti pada setiap frekuensi dicatat nilai gaya dan respons kompleksnya. Karena struktur bersifat nonlinear, setiap frekuensi input akan menghasilkan respons dengan frekuensi input beserta harmoniknya.

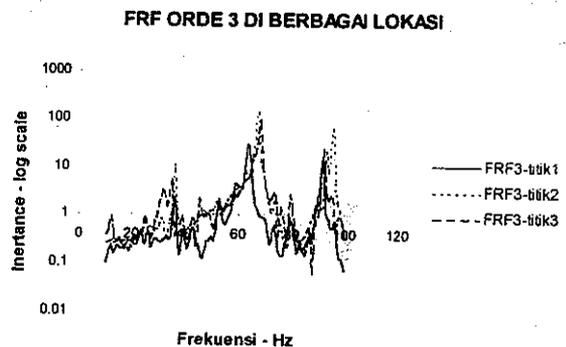
Hasil-hasil yang diperoleh seperti terlihat dalam Gambar 3a, 3b dan 3c menunjukkan fenomena yang hampir sama dengan yang diperoleh oleh Storer [2].



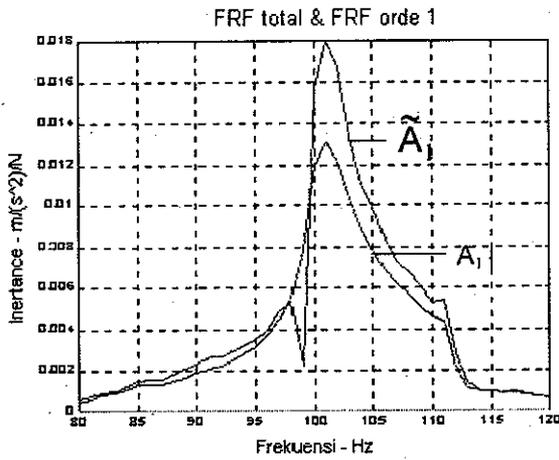
Gambar 3a. FRF total orde pertama ${}_1\tilde{A}_{12}$, ${}_1\tilde{A}_{22}$, ${}_1\tilde{A}_{32}$ - amplitudo gaya eksitasi konstan



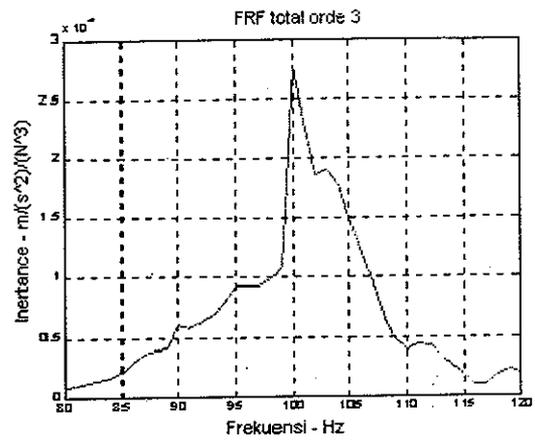
Gambar 3b. FRF total orde kedua ${}_2\tilde{A}_{12}$, ${}_2\tilde{A}_{22}$, ${}_2\tilde{A}_{32}$ - amplitudo gaya eksitasi konstan



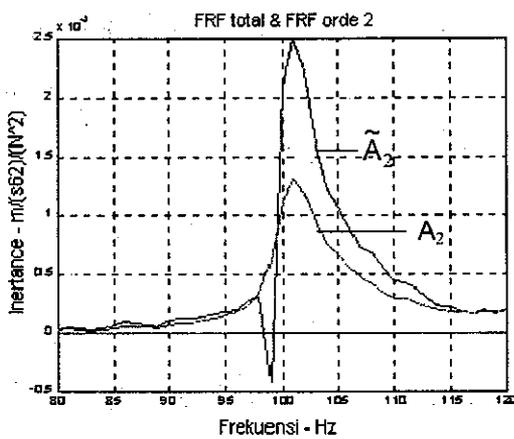
Gambar 3c. FRF total orde ketiga ${}_3\tilde{A}_{12}$, ${}_3\tilde{A}_{22}$, ${}_3\tilde{A}_{32}$ - amplitudo gaya eksitasi konstan



Gambar 11. FRF total orde 1 \tilde{A}_1 dibandingkan dengan FRF orde 1 A_1



Gambar 13. FRF total orde 3 \tilde{A}_3



Gambar 12. FRF total orde 2 \tilde{A}_2 dibandingkan dengan FRF orde 2 A_2

Untuk mengetahui nonlinearitas bantalan pada orde tiga dilakukan pengukuran FRF total orde tiga. Hasilnya dapat dilihat pada Gambar 13.

6. ANALISIS

Dari hasil pengukuran FRF total batang jepit-jepit dapat dikemukakan hal-hal berikut :

- Sesuai dengan yang diperoleh Storer[1] batang jepit-jepit mempunyai kekakuan kuadratik yang cukup berarti dan kekakuan kubik yang lemah. Ini diperlihatkan oleh FRF total orde tiga yang kurang jelas bentuknya.
- Nonlinearitas terdistribusi secara merata sepanjang batang. Hal ini terlihat di ketiga titik pengukuran FRF total orde tinggi mempunyai bentuk yang jelas.

- Adanya pergeseran frekuensi pribadi diketiga titik pengukuran. Hal ini mengindikasikan adanya pengaruh massa *accelerometer* yang dipakai.
- Pada FRF total orde dua muncul puncak dengan frekuensi setengah dari frekuensi fundamental. Ini adalah ciri sistem yang mempunyai kekakuan kuadratik yang kuat.

Untuk bantalan bola :

- Adanya perbedaan yang cukup berarti antara FRF total dan FRF orde tinggi untuk amplitudo eksitasi yang dipilih. Kendala utama dalam pemilihan amplitudo yang rendah adalah respons getaran bantalan terlalu kecil sehingga getaran yang terdeteksi berasal dari derau (*noise*).
- Pengukuran FRF total orde dua dan tiga menunjukkan bahwa bantalan mempunyai kekakuan kuadratik dan kubik yang kuat.
- Setelah diubah menjadi *Receptance* parameter dinamik bantalan bola yang diperoleh dengan metoda Lee dan Storer dapat dilihat dalam Tabel (2) berikut ini :

Tabel 2. Parameter dinamik bantalan bola

Parameter	Lee	Storer
Massa (m)	7.2	57.7
Kekakuan linear (k_1)	3×10^6	7.4×10^7
Kekakuan kuadratik (k_2)	4.1×10^{11}	
Kekakuan kubik (k_3)	7.2×10^{16}	
Redaman (c)	63.1	4509

Dari Tabel (2) terlihat adanya perbedaan yang cukup berarti antara kedua metoda. Kekakuan nonlinear dengan metoda Storer tidak dihitung karena memerlukan frekuensi pengukuran dua dan tiga kali lipat dari rentang frekuensi pengukuran yang dipilih (80 Hz - 120 Hz). Dari segi pengukuran dan hasil-hasil yang diperoleh, metoda Lee lebih baik daripada metoda yang dipakai Storer. Pada rentang frekuensi dua kali lipat dari rentang

frekuensi yang dipilih, dengan metoda Lee diperoleh FRF orde tinggi dan juga parameter modus getar linear maupun nonlinear.

7. KESIMPULAN

- Prosedur pengukuran yang telah dilakukan dapat digunakan untuk mengukur FRF total dan memperoleh FRF orde tinggi.
- Prosedur ini juga dapat digunakan untuk menentukan nonlinearitas lokal suatu sistem getaran.
- Batang jepit-jepit yang diuji mempunyai kekakuan kuadratik yang kuat dan kekakuan kubik yang lemah.
- Bantalan bola mempunyai kekakuan kuadratik dan kubik yang kuat.
- Dua cara pengukuran FRF total dan FRF orde tinggi serta penentuan parameter dinamik nonlinear belum mempunyai kesesuaian yang cukup baik. Hal ini disebabkan amplitudo minimal yang dapat dicapai dalam pengukuran ini belum cukup rendah sehingga komponen orde tinggi tidak dapat diabaikan.
- Perubahan amplitudo eksitasi cukup berpengaruh terhadap FRF total dan dengan demikian berpengaruh pula terhadap parameter dinamik nonlinearnya.
- Dari segi pengukuran maupun perhitungan, metoda Lee lebih baik daripada metoda Storer.

8. UCAPAN TERIMAKASIH

Makalah ini merupakan bagian dari penelitian utama yang berjudul 'Mechanical Signature Analysis of Synchronous and Asynchronous Excited Rotating Rotor Supported By Rolling Element Bearing' yang dibiayai melalui dana Penelitian Hibah Tim dari Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi, Departemen Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia dengan nomor kontrak 018/HTPP/II/URGE/1996.

9. SIMBOL

$\tilde{H}_n(j\omega)$	receptance total orde n
$Y(jn\omega)$	respons pada frekuensi $n\omega$
$X(j\omega)$	gaya eksitasi pada frekuensi ω
$x(t)$	stimulus dalam domain waktu
$y(t)$	respons dalam domain waktu
$h(t)$	fungsi respons impuls
$H_n(j\omega_1, \dots, j\omega_n)$	receptance orde n
ω_n	frekuensi pribadi
${}_n\tilde{A}_{jk}$	inertance total orde n dengan stimulus di titik k dan respons di titik j
\tilde{A}_n	inertance total orde n
A_n	inertance orde n

10. REFERENSI

1. Storer DM dan Tomlinson GR, "Higher Order Frequency Response Functions and Their Relation to Practical Structures", *10th International Modal Analysis Conference*, Florence, Italy, 1992.
2. Lee GM, "Estimation of Nonlinear System Parameters Using Higher Order Frequency Response Functions", *Mechanical systems and Signal Processing*, 11(2), 219 – 228, 1997
3. Tomlinson GR, et al. "A Simple Criterion for Establishing an Upper Limit to the Harmonic Excitation Level of the Duffing Oscillator Using the Volterra Series", *Journal of Sound and Vibration* 190(5), 751-762, 1996.
4. Lim TC dan Singh R, "Vibration Transmission Through Rolling Element Bearings, Part I : Bearing Stiffness Formulation", *Journal of Sound and Vibration*, 139(2), 179 – 199, 1990.
5. Iskandar IS, *Kaji Eksperimental dan Analisis Teoritik Respons Getaran Sistem Poros Rotor karena Massa tak Seimbang dan Cacat pada Bantalan*, Thesis Magister, Teknik Mesin, ITB, 1997.
6. Schetzen M, *The Volterra and Wiener Theories of Non-Linear Systems*, John Wiley, New York, 1980.
7. Storer DM dan Tomlinson GR, "An Explanation of the Cause of the Distribution in the Transfer Function of A Duffing Oscillator Subject to Sine Excitation", *10th International Modal Analysis Conference*, Florence, Italy, 1992.
8. Natke HG, et al, "A Brief Review On the Identification of Nonlinear Mechanical Systems", *10th International Modal Analysis Conference*, Florence, Italy, 1992.
9. Nayfeh A.H and Mook D.T, *nonlinear oscillations*, John Wiley & Sons, New York, 1979.
10. Ewins DJ, *Modal Testing : Theory and Practise*, Research Studies Press, Letchworth, UK, 1984.